

Les TD de 2014/2015 avec correction

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\int_0^x \frac{t^n dt}{e^t - 1}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (a+b)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\int_0^x \frac{t^n dt}{e^t - 1}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

math pour la chimie



Email: Clubnajah2013@gmail.com

www.clubnajah.blogspot.com

www.facebook.com/succes.club

تمنياتنا للجميع بالتوفيق والنجاح

2015/2016



تمارين الأعمال التوجيهية لسنة

2014/2015 رفقة التصحيح

من جمع وترتيب نادي النجاح

تشكراتنا لكل من ساهم من قريب أو بعيد

في إنجاز هذا العمل وأخص بالذكر الطالبة

للمساهمة في إعداد هذا العمل آسية عاطف

عن المكتب المسير للنادي



Email: Clubnajah2013@gmail.com

www.clubnajah.blogspot.com

www.facebook.com/succes.club

SERIE 1

(Séries numériques)

Exercice 1

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

a) $u_n = \frac{1}{(2014)^n}$ (examiner le cas où on lui retranche ses trois premiers termes)

b) $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$

Exercice 2

1. Quelle est l'erreur commise quand on calcule

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

en s'arrêtant à l'ordre 8.

2. Trouver un majorant et un minorant du reste du rang p de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$

Exercice 3

Montrer que les séries dont les termes généraux sont les suivants, sont divergentes :

a) $u_n = \frac{n}{n+1}$ b) $v_n = \sqrt{n^2 + n} - 1 - n$ c) $w_n = n \sin \frac{1}{3n}$

Exercice 4

1. Montrer que la série harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy.
2. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\ln x$ sur l'intervalle $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la série harmonique est divergente.

Exercice 5

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.



Exercice 6

Étudier la nature des séries à termes positifs suivantes :

a) $u_n = \frac{1}{\ln n}$ (utiliser une inégalité)

b) $v_n = \frac{1}{n2^n}$ (utiliser un rapport)

c) $w_n = \ln n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ (utiliser une série de Riemann)

d) $t_n = \frac{n^3}{e^n}$ (utiliser la règle de Cauchy)

e) $s_n = \frac{n!}{n^n}$ (utiliser la règle de D'Alembert)

f) $r_n = \frac{1}{n \ln n}$ (utiliser la comparaison avec une intégrale)

Exercice 7

Montrer que les séries dont les termes généraux sont les suivants, sont absolument convergentes :

a) $u_n = \frac{1}{5^n} \cos n\theta$ (appliquer la règle de comparaison)

b) $v_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{n}} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$ (appliquer la règle de Cauchy)

c) $w_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{n}} \frac{n}{2^n}$ (appliquer la règle de D'Alembert)



Exercice 8

Déterminer la nature des séries alternées dont les termes généraux sont les suivants :

a) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ b) $v_n = \frac{(-1)^n}{3n+\sin n}$ c) $w_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

SERIE 2**(Séries entières)****Exercice 1**

Déterminer le rayon de convergence et l'intervalle de convergence des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$\text{a) } u_n = x^n \quad \text{b) } u_n = \frac{x^n}{n} \quad \text{c) } u_n = \frac{x^n}{n!} \quad \text{d) } u_n = \frac{n!}{n^n} x^n$$

**Exercice 2**

Déterminer le rayon de convergence, l'intervalle de convergence et la nature aux bornes de cet intervalle, des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$\text{a) } u_n = \frac{n}{n^2+1} x^n \quad \text{b) } u_n = \frac{x^n}{n2^n} \quad \text{c) } u_n = \frac{n}{2^n(n+1)} x^n$$

Exercice 3

Utiliser une addition et un changement de x en αx pour déterminer la somme de la série de terme général $u_n = (1 + \alpha^n) \frac{x^n}{n!}$ sachant que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Exercice 4

Utiliser une ^{intégration} ~~dérivation~~ pour déterminer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n}$ sachant que pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Exercice 5

Utiliser une ^{dérivation} ~~intégration~~ pour déterminer la somme de la série de terme général $u_n = (n+1) \frac{x^n}{n!}$

Sachant que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Exercice 6

Déterminer le développement en série entière, puis déduire le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0, des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(x) = (e^x)^2 \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$$

Exercice 7

Calculer la somme des séries entières suivantes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$$



SERIE 3

(Suites et Séries de fonctions - Séries de Fourier)

Exercice 1

On pose $f_n(0) = 0$ et pour $x \in]0,1]$

$$f_n(x) = x^n \ln x$$

Montrer que la suite de fonctions f_n converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Exercice 2

On pose, pour $x \in [0, +\infty[$

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$$



Montrer que la suite de fonctions f_n converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3

On pose, pour $x \in [0, +\infty[$

$$f_n(x) = \frac{nx e^{-nx}}{1 - e^{-x}}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4

On pose, pour $x \in [0, +\infty[$

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement vers 1 sur $[0, +\infty[$.
- ✗ 3. Montrer que la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[a, +\infty[$ avec $(a > 0)$.
4. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, a]$.
5. Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, a]$.
6. La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

NON

Exercice 5

Montrer que :

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin nx)^2}{4n^2 - 1}$$



Exercice 6

Calculer les coefficients exponentiels (e) ou trigonométriques (t) des fonctions 2π - périodiques suivantes :

1. $f_1(x) = \pi - x$ sur $[0, 2\pi[$ (t)
2. $f_2(x) = x^2$ sur $[0, 2\pi[$ (e)
3. $f_3(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$ (t)
4. $f_4(x) = \sin x$ sur $[0, 2\pi]$ (t) et (e)

Série N°1

Exercice 1

Rappel : Soit U_n une suite numérique

Soit S_n suite des sommes

déf sur : $S_0 = U_0$

$$S_1 = U_0 + U_1$$

$$S_2 = U_0 + U_1 + U_2$$

Si (S_n) CV on dit et on note

la série $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ CV

$$\text{li } S_n = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$$

$$1) - U_n = \frac{1}{(2014)^n}$$

Suite géométrique $U_n = (q)^n$

avec $q = \frac{1}{2014}$

$$S_n = \sum_{k=3}^n U_k = U_3 + U_4 + \dots + U_n$$

$$= \frac{1}{(2014)^3} + \frac{1}{(2014)^4} + \dots + \frac{1}{(2014)^n}$$

$$= \frac{1}{(2014)^3} \left[1 + \frac{1}{2014} + \frac{1}{(2014)^2} + \dots + \frac{1}{(2014)^{n-3}} \right]$$

$$= \frac{1}{(2014)^3} \times \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{(2014)^k}$$

$$S_n = \frac{1}{(2014)^3} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2014}\right)^{n-2}}{1 - \left(\frac{1}{2014}\right)} \right]$$

$$\text{on a : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2014}\right)^{n-2} = 0$$

$$\text{Car } -1 < \frac{1}{2014} < 1$$

$$\text{de : } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{(2014)^3} \times \frac{2014}{2013}$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} U_k = \frac{1}{(2014)^2 \times 2013}$$

donc : la série $\sum U_n$ CV

$$2) - V_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

$$a = 1 \quad b = -1$$

$$\text{dc : } U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

donc : $\sum V_n$ CV

Exercice 2

Rappel : $R_p = \sum_{n=0}^{\infty} U_n - S_p$

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} U_n = U_{p+1} + U_{p+2} + \dots + U_n + \dots$$

④ - L'erreur :

$$S = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^8}}_{S_8} + \underbrace{\frac{1}{2^9} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{R_8}$$

L'erreur commise qd on s'arrête à S_8 est R_8

$$R_8 = \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$= \frac{1}{2^9} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-9}} + \dots \right]$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ (S géométrique)

$$= \frac{1}{2^9} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^8}$$



Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement Supérieur

② - $\sum_n \frac{1}{n^2}$ Série de Riemann

$\alpha = 2 > 1$
donc $\sum_n \frac{1}{n^2} \text{ CV} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned} \text{or : } R_p &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n - S_p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - S_p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{p^2}\right) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - p &\leq R_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{p^2}\right) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Exercice 3

① - $U_n = \frac{n}{n+1}$

$\lim U_n = 1 \Rightarrow \sum_n U_n \text{ div}$

$U_m > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$\sum_n U_n \text{ div} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} U_n = \pm \infty$

② $V_n = \sqrt{n^2 + n - 1} - n$

$\lim V_n = \lim \frac{(\sqrt{n^2 + n - 1} - n)(\sqrt{n^2 + n - 1} + n)}{(\sqrt{n^2 + n - 1} + n)}$

$\lim \frac{n^2 + n - 1 - n^2}{(\sqrt{n^2 + n - 1} + n)}$

$= \lim \frac{n^2 + n - 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n - 1} + n}$

$= \lim \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + n - 1} + n} = \frac{1}{2}$

③ - $W_n = n \sin \frac{1}{3n}$

$\sin x \sim x$

$\sin \frac{1}{3n} \sim \frac{1}{3n}$

$n \sin \frac{1}{3n} \sim \frac{n}{3n}$

$W_n \sim \frac{1}{3}$

$\lim W_n = \frac{1}{3}$

dc : $W_n \text{ div}$

Exercice 4

1° Série harmonique a pour Terme général

$U_n = \frac{1}{n} \geq 1$

$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} ; n \geq 1$

Critères de Cauchy pour les séries numériques :

Soit $\sum U_n$ une série cette série vérifie le critère de Cauchy si :

$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \forall m > n \geq N \left| \sum_{k=n+1}^m U_k \right| < \epsilon$

$S_n \text{ de Cauchy} \Leftrightarrow$

$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > n \geq N$

$|S_m - S_n| < \epsilon$

$S_m - S_n = \sum_{k=1}^m U_k - \sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=n+1}^m U_k$

$\sum U_k$ ne vérifie pas le critère de Cauchy :

$\exists \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N}^* \exists m > n \geq N \text{ tq } \left| \sum_{k=n+1}^m U_k \right| \geq \epsilon$

$\left| \sum_{k=n+1}^m U_k \right| \geq \epsilon$

Pour la série harmonique
on va montrer que :

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N}^* \exists m > n \geq N \text{ tq } \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} \geq \varepsilon$$

Soit $N \in \mathbb{N}^* : m = 2N \quad n = N$

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} \geq ?$$

On a pour : $N+1 \leq k \leq 2N$

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2N} \text{ donc :}$$

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \dots + \frac{1}{2N} = N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \text{ tq } \forall N \in \mathbb{N}^*$$

$$\exists m = 2N, \exists n = N \text{ tq}$$

$$2N > N \geq N \text{ et}$$

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$$



$\Rightarrow$ La Série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

2°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$: Appliquer
le théorème des accroissements
finis à $f(x) = \ln x$ sur

$$[n, n+1] \subset]0, +\infty[$$

* f est continue sur $[n, n+1]$

* f est dérivable sur
 $]n, n+1[$

Alors : $\exists C_n \in]n, n+1[\text{ tq}$

$$f(n+1) - f(n) = (n+1 - n) f'(C_n)$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{C_n}$$

donc : $\forall n \geq 1, \exists C_n \in]n, n+1[$
vérifiant :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{C_n}$$

$$\text{or : } 1 \leq n < C_n < n+1$$

$$\text{donc : } \frac{1}{n+1} < \frac{1}{C_n} < \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1 \quad (*)$$

Posons $s_n :$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad k \geq 1$$

$$(*) \Rightarrow \text{pour } 1 \leq k \leq n$$

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$*) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} - \frac{1}{1} = S_{n+1} - 1$$

$$*) \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \dots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

Finalement :

$$S_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < S_n \quad \forall n \geq 1$$

$$S_n > L_n(n+1) \quad \forall n \geq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(n+1) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

$$\text{donc : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

Remarque :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{CV} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{DV} & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\alpha \leq 1 \quad n^\alpha \leq n$$

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} > 0$$

donc : Selon C. Comparaison
 $\frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Exercice 5

$$U_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad n \geq 2$$

$$\text{Si } n \geq 2 ; n^2 \geq 4$$

$$n^2 - 1 \geq 3$$

$$\frac{n^2 - 1}{n^2} \geq \frac{3}{n^2} > 0$$

$$1 - \frac{1}{n^2} > 0$$

donc U_n est bien définie
pour $n \geq 2$.

$$1 - \frac{1}{n^2} \leq 1 \quad \forall n \geq 2$$

$$U_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \leq 0$$

Posons :

$$V_n = -U_n$$

$$= -\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \geq 0 \quad \forall n \geq 2$$

Étudions $\sum V_n$.

Appliquons le critère
d'équivalence

$$\text{Posons : } W_n = \frac{1}{n^2} \quad n \geq 2$$

$$\text{on a } W_n > 0 \quad \forall n \geq 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{W_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1 - \frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \right) \\ &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - \frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) - \ln(1-0)}{x-0} \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

Avec :

$$f(x) = \ln(1-x) \quad x \in]-\infty, 1[$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x} \quad f'(0) = -1$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{W_n} = 1 \quad \forall n \in]0, +\infty[$$

donc :

$$\sum V_n \text{ Converge} \Leftrightarrow \sum W_n \text{ Converge}$$

(de même nature)

$$\text{or : } \sum_{n=2}^{\infty} W_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ Converge}$$

(Série de Riemann avec $\alpha=2>1$)

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} V_n \text{ Converge.}$$

$$\text{or : } V_n = -U_n = \lambda U_n \quad \lambda = -1 \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} V_n \text{ Converge} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \text{ Converge et on a}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} U_n = - \sum_{n=2}^{+\infty} V_n.$$

Exercice 6

$$1^\circ - U_n = \frac{1}{\ln n} ; n \geq 2$$

$$\text{On a } U_n > 0 \quad \forall n \geq 2$$

Remarque :

$$\text{Si } \sum_{n=n_0}^{\infty} U_n \text{ Converge}$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

donc : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \neq 0$ ou n'existe pas

Alors $\sum U_n$ diverge

$$\bullet \text{ On a } \ln x \leq x \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

Considérons :

$$h(x) = x - \ln(x) , x > 0$$

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0	1	
h'		-	+

Diagram showing the behavior of h(x) for x > 0. The function h(x) is decreasing from +∞ at x=0 to a minimum at x=1, and then increasing towards +∞ as x increases.

$$h(x) \geq 1 > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$x \geq \ln x$$

Pour $n \geq 2$ on obtient

$$n \geq \ln(n) \geq \ln 2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln(n)}$$

$$\text{Posons : } U_n = \frac{1}{n}$$

$$n \geq 2, U_n > 0 \quad \forall n \geq 2$$

$$\text{On a : } 0 \leq U_n \leq U_{n-1} \quad \forall n \geq 2$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} U_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

Le critère de Comparaison

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} U_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \text{ diverge.}$$

$$2^\circ / U_n = \frac{1}{n 2^n} \quad n \geq 0$$

$$\text{On a : } U_n = \frac{1}{n 2^n} > 0 \quad \forall n \geq 1$$

Remarque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{W_n} = l \quad 0 < l < +\infty$$

$$\circledast \quad 0 < l < +\infty \quad \sum U_n \text{ CV} \Leftrightarrow \sum W_n \text{ CV}$$

$$\circledast \quad l = 0 \quad \sum W_n \text{ CV} \Rightarrow \sum U_n \text{ CV}$$

$$\circledast \quad l = +\infty \quad \sum W_n \text{ div} \Rightarrow \sum U_n \text{ div}$$

$$U_n > 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{Soit } W_n = \frac{1}{2^n} > 0 \quad n \geq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{W_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n 2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{W_n} = 0 < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ CV Car } 0 < \frac{1}{2} < 1$$

Le critère d'équivalence

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n \text{ Converge}$$



$$3^o) W_n = \ln n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \quad n \geq 1$$

Soit $n \geq 1$ on a $W_n \geq 0$

$$W_n = \frac{\ln(n)}{n} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

Posons : $y_n = \frac{1}{n^2} ; n \geq 1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \ln(n) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \\ &= 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ Converge}$$

Riemann $\alpha = 2 > 1$

$$\frac{W_n}{\frac{1}{n^2}} = n^2 W_n = n^2 \frac{\ln n}{n} \cdot \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{\sim 1} \cdot \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}}_{\sim 1}$$

$$\frac{1}{n^{2-\alpha}} \quad 0 \leq 2-\alpha \text{ et } \alpha > 1$$

4^o) $t_n = \frac{n^3}{e^n}, n \in \mathbb{N}$

$t_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$



$$\begin{aligned} \sqrt[n]{t_n} &= (t_n)^{\frac{1}{n}} \quad n \geq 1 \\ &= \left(\frac{n^3}{e^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{3}{n}}}{e^{\frac{n}{n}}} = \frac{n^{\frac{3}{n}}}{e} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{3 \ln(n)}{n}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{t_n} = \frac{1}{e} < 1$$

La règle de Cauchy

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} t_n \text{ Converge}$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

5^o) $\frac{n!}{n^n} = S_n \quad n \geq 1$

$S_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1}}{S_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{(n+1) \cancel{n!} \cdot n^n}{(n+1)(n+1)^n \cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1}}{S_n} &= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= e^{n \log\left(\frac{n}{n+1}\right)} \\ &= e^{-n \log\left(\frac{n+1}{n}\right)} \\ &= e^{-n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{-\frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} = e^{-1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1}{e} < 1$$

La règle de l'Alembert

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \text{ Converge.}$$

6^o) $r_n = \frac{1}{n \ln(n)} ; n \geq 2$

Comparaison avec intégrale :

$$r_n = \frac{1}{n \ln(n)} = f(n) \quad n \geq 2$$

avec $f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad x \geq 2$

$$f: [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

f est continue, positive, dérivable.

$$f'(x) = \frac{-(x \ln x)'}{[x \ln(x)]^2}$$

$$= \frac{-\ln(x) + 1}{[x \ln(x)]^2} < 0 \quad \forall x \geq 2$$

donc f est décroissante sur $[2, +\infty[$. Alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} f(n) \text{ Converge } \underline{\text{Si}}$$

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx \text{ Converge}$$

Rappel:

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_2^u f(x) dx$$

Soit $u \in [2, +\infty[$

Comme f est continue sur $[2, u]$

donc $\int_2^u f(x) dx$ existe

$$\begin{aligned} \int_2^u f(x) dx &= \int_2^u \frac{dx}{x \ln x} \\ &= \left[\ln(\ln x) \right]_2^u \end{aligned}$$

$$\int_2^u f(x) dx = \ln(\ln u) - \ln(\ln 2)$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_2^u f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln(\ln u) - \ln(\ln 2)) = +\infty$$

donc $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ diverge

$\Rightarrow$ par conséquent $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge.



Remarque

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$$

Converge si $\begin{cases} \alpha > 1 & \beta \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 & \beta > 1 \end{cases}$

diverge si $\begin{cases} \alpha < 1 & \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha = 1 & \beta \leq 1 \end{cases}$

$$\text{Soit } U_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} \quad n \geq 2$$

$\otimes \alpha \neq 1$

$$\alpha > 1 \quad V_n = \frac{1}{n^\alpha} \quad 1 < \alpha < \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\beta} \ln(n)^\beta} = 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$\sum V_n = \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV } \quad \alpha > 1$$

$$\sum U_n \text{ CV}$$

Exercice 7

On dit que $\sum U_n$ Converge absolument $\Leftrightarrow \sum |U_n|$ Converge

• Si $\sum U_n$ Converge Absolument
Alors $\sum U_n$ Converge.

$$(*) U_n = \frac{1}{5^n} \cos n\theta \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$|U_n| = \frac{|\cos n\theta|}{5^n} \leq \frac{1}{5^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq |U_n| \leq \frac{1}{5^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} \text{ Converge Car } 0 < \frac{1}{5} < 1$$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{\infty} |U_n| \text{ Converge.}$$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{\infty} U_n \text{ Converge Absolument}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \text{ Converge.}$$

$$(*) V_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n}{2n-1} \right)^n \quad n \geq 1$$

$$= (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{2n-1} \right)^n \quad n \geq 1$$

$$|V_n| = \left| (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \right)^n \right|$$
$$= \left(\frac{n}{2n-1} \right)^n \quad n \geq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|V_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |V_n| \text{ Converge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} V_n \text{ Converge absolument}$$

$$\text{donc : } \sum_{n=1}^{\infty} V_n \text{ Converge.}$$

$$(*) W_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n}{2^n}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} \quad n \geq 1$$

$$|W_n| = \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} \right| = \frac{n}{2^n}$$

$$\frac{|W_{n+1}|}{|W_n|} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|W_{n+1}|}{|W_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |W_n| \text{ Converge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} W_n \text{ Converge absolument}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} W_n \text{ Converge}$$



Exercice 8

$$(*) U_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \quad n \geq 1$$

$$|U_n| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right| = \frac{1}{2n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |U_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|U_n|}{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} |U_n|$ est de même nature
que $\sum \frac{1}{n}$

or: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} |U_n|$ diverge

On peut dire de $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

$$U_n = (-1)^{n-1} V_n$$

avec: $V_n = \frac{1}{2n-1} \quad n \geq 1$

(*) $V_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

(*) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$

(*) $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2n+2-1} - \frac{1}{2n-1}$
$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2n-1-2n+1}{(2n+1)(2n-1)}$$
$$= \frac{-2}{(2n+1)(2n-1)} < 0$$

donc: V_n est décroissante

Le critère d'Abel:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \text{Converge.}$$

(*) $U_n = \frac{(-1)^n}{3n + \sin n} \quad n \geq 1$

Si $n \geq 1 \quad \sin n \geq -1$

$$\Rightarrow 3n + \sin n \geq 3n - 1 \geq 3 - 1 = 2$$

$$U_n = (-1)^n V_n$$

avec: $V_n = \frac{1}{3n + \sin n} > 0$

$$|U_n| = \frac{1}{3n + \sin n} = V_n, \quad n \geq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \neq \sum \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{\frac{1}{3n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{3n + \sin n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{3n \left[1 + \frac{\sin n}{3n} \right]}$$



$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\sin n}{3n}} = 1$$

Car: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

donc: $\sum V_n$ est de même nature

que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui diverge

donc: $\sum_{n=1}^{+\infty} |U_n|$ diverge

Que peut-on dire de $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$?

$$U_n = (-1)^n V_n \quad n \geq 1$$

$$(*) U_n = \frac{1}{3n + \sin n} > 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$(*) \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin n}{3n}} \right) = 0$$

$$(*) U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3(n+1) + \sin(n+1)} - \frac{1}{3n + \sin n}$$

$$= \frac{3n + \sin n - (3n + 3 + \sin(n+1))}{[3(n+1) + \sin(n+1)](3n + \sin n)}$$

$$= \frac{\sin n - \sin(n+1) - 3}{(\quad) (\quad)}$$

$$\geq 0 \quad \geq 0$$

$$\text{on a : } \sin m \leq 1 \quad \forall n \geq 1$$

$$-1 \leq \sin(n+1)$$

$$-\sin(n+1) \leq 1$$

$$\Rightarrow \sin n - \sin(n+1) \leq 2$$

$$\Rightarrow \sin n - \sin(n+1) - 3 \leq 2 - 3 = -1 < 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow U_n \text{ décroissante}$$

La règle d'Abel :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n U_n \text{ Converge}$$

$$(*) W_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad n \geq 1$$

$$|W_n| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \geq 1$$

Remarque :

$$(*) U_n = \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{U_n} = 1$$

diverge

$$(*) U_n = \frac{1}{n^2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$

Converge

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |W_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$



$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}}$$

$$= e^1 \neq 0$$

$$\text{donc : } \sum_{n=1}^{\infty} |W_n| \text{ diverge}$$

Que peut-on dire de $\sum_{n=1}^{\infty} W_n$?

$$\text{on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} |W_n| = e \neq 0$$

$$\lim W_n \neq 0 \text{ (si cette limite existe)}$$

En fait, $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$ n'existe pas

Car :

$$(*) W_{2k} = (-1)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}$$

$$= e$$

$$(*) W_{2k+1} = -\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1}$$

$$= -e$$

donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ n'existe pas,

$\Rightarrow$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

Série entière

On appelle série entière réelle, toute série de la forme $\sum a_n x^n$ où $a_n \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$U_n = a_n x^n \quad n \geq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n| |x|^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} |x|$$

Posons : $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$
(si elle existe)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \ell |x|$$

• Si $\ell |x| < 1 \Rightarrow$

$\sum a_n x^n$ C. Absolument

• Si $\ell |x| > 1 \Rightarrow$

$\sum a_n x^n$ diverge.

$$(*) |x| < \frac{1}{\ell} \Rightarrow \sum a_n x^n \text{ C.A}$$

$$(*) |x| > \frac{1}{\ell} \Rightarrow \sum a_n x^n \text{ diverge}$$

on pose : $R = \frac{1}{\ell}$: c'est le rayon de convergence de

$$\sum a_n x^n$$

avec les conventions suivantes :

$$R = +\infty \text{ si } \ell = 0$$

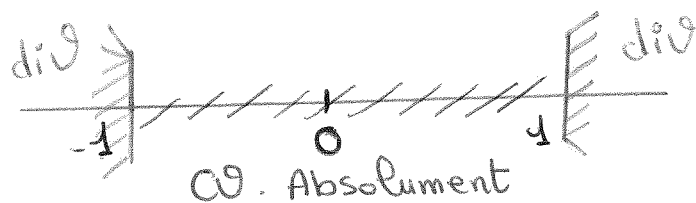
$$R = 0 \text{ si } \ell = +\infty$$

Exemple : $(*) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

$$a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \text{ donc } R = 1$$

donc $\sum x^n$ C. Absolument si $|x| < 1$
div si $|x| > 1$



$$(*) U_n = \frac{x^n}{n} \quad n \geq 1$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad n \geq 1$$

ona : $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = m$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$R = \frac{1}{1} = 1$$

donc : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ C. Absolu si $|x| < 1$
div si $|x| > 1$



$$(*) U_n = \frac{x^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$R = +\infty$$

$\sum \frac{x^n}{n!}$ Converge Absolument
sur $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

exemples :

Calculer :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!}$$

Soit : $x \in \mathbb{R}$ Supposons $x \geq 0$

Appliquons la formule de Taylor
à l'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de $g(t) = e^t$
sur $[0, x]$

$$g(x) = g(0) + g'(0) \cdot x + \dots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k +$$

$$\frac{g^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1}$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} \\ + \frac{e^c}{(k+1)!} x^{k+1}$$

$$= \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = e^x$$

donc :

$$e^x = \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Faisons tendre $k \rightarrow +\infty$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(*) U_m = \frac{n!}{n^m} x^m$$

Rappel :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n, \quad a_n \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum a_n \cdot x^n \text{ CV} \right\}$$

= domaine de CV

Rayon de CV de S

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}$$

$$\Rightarrow]-R, R[\subset \Delta$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\ = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\textcircled{*} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

$$= - \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

$$= - \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$= - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = -1 \times 1 = -1$$

$$\text{d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-1}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{e^{-1}} = e.$$

$] -e, e[\subset \Delta$ = intervalle de Convergence.

Exercice 2

$$\textcircled{*} \frac{n}{n^2+1} x^n$$

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^2 \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2} \right)}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} \sim \frac{1}{n}$$

donc :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{1}{n} \times \frac{n}{1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

$$\text{et } R = 1$$

et $] -1, 1[$ est l'intervalle de Convergence.

• Etude de la série entière aux points $x = -1$ et $x = 1$

$$\textcircled{*} \text{ Si } x = 1 \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^2+1}$$

$$\text{on pose : } t_n = \frac{n}{n^2+1} \geq 0$$

$$t_n \sim \frac{1}{n}$$

donc : $\sum t_n$ et $\sum \frac{1}{n}$ ont la même nature $\Rightarrow$ divergente

donc : $x = 1 \notin$ domaine de

Convergence de

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n$$

$$\textcircled{*} \text{ Si } x = -1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} (-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$$

$$\text{on pose : } u_n = \frac{n}{n^2+1}$$

$$\checkmark u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\checkmark u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1}$$

$$= \frac{(n+1)(n^2+1) - n[(n+1)^2+1]}{\textcircled{+}}$$

$$= \frac{n^3+n+n^2+1 - n^3 - 2n^2 - 2n}{\textcircled{+}}$$

$$= \frac{-n^2 - n + 1}{\textcircled{+}}$$

$$P(x) = -x^2 - x + 1$$

$$\Delta = 5$$

$$X_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{+2} \quad X_2 = \frac{-(1 + \sqrt{5})}{+2}$$



$$U_n \geq 1 \quad U_{n+1} - U_n \leq 0$$

donc : $U_n \downarrow$

$$\Rightarrow \sum (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2+1} \text{ est CV}$$

d'où : $-1 \in \text{domaine de CV de } S(x)$

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum \frac{n}{n^2+1} x^n \text{ Converge} \right\}$$

$$= [-1, 1[$$



$$\textcircled{*} U_n = \frac{x^n}{n 2^n}$$

$$a_n = \frac{1}{n 2^n} \quad \forall n \geq 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1) 2^{n+1}} \cdot n 2^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\text{d'où : } R = \frac{1}{2}$$

• L'intervalle de CV : $] -2, 2 [$

• Etude de la série aux points

$x = -2$ et $x = 2$:

$$\textcircled{\pm} x = 2 : \sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n 2^n} = \sum \frac{1}{n}$$

div $\swarrow$

donc : $2 \notin \text{à l'intervalle de CV de } S.$

$$\textcircled{\pm} x = -2 : \sum \frac{1}{n 2^n} \cdot (-2)^n = \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

= Série alternée CV

$$t_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$-2 \in \text{à l'intervalle de CV de } S(x)$

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum \frac{x^n}{n 2^n} \text{ CV} \right\}$$

$$= [-2, 2[$$

$$\textcircled{*} U_n = \frac{n}{2^n (n+1)} x^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1} (n+2)} \cdot \frac{2^n (n+1)}{n}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{2(n+2)n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} (n+1)^2 \sim_{+\infty} n^2 \\ n(n+2) \sim_{+\infty} n^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \sim_{+\infty} 1$$

$$\text{d'où : } R = 2$$

L'intervalle de CV $] -2, 2 [$

• L'étude de la série entière

en $x = -2$ et $x = 2$

$$\textcircled{\pm} x = 2 : \sum \frac{n}{2^n (n+1)} 2^n$$

$$= \sum \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 \quad \text{diverge}$$

$\Rightarrow 2 \notin \text{à la domaine de CV}$

$$\textcircled{\pm} x = -2$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^n (n+1)} (-2)^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\text{on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

donc : $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$ diverge.

$\Rightarrow -2 \notin \text{à la domaine de CV}$

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum \frac{n x^n}{2^n(n+1)} \text{ CV} \right\}$$

$$=]-2, 2[$$

Remarque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \text{ n'existe pas.}$$

$$\bullet n = 2m : \lim_{m \rightarrow +\infty} (-1)^{2m} \cdot \frac{2m}{2m+1} = 1$$

$$\bullet n = 2m+1 :$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (-1)^{2m+1} \frac{2m+1}{2m+2} = -1$$

Exercice 3

$$U_n = (1 + \alpha^n) \frac{x^n}{n!}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \alpha^n) \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} + \frac{\alpha^n \cdot x^n}{n!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (A_n + B_n)$$

$$= \sum \frac{x^n}{n!} + \sum \frac{\alpha^n \cdot x^n}{n!}$$

$$\sum U_n = e^x + \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha x)^n}{n!}$$

$$\oplus \text{ Calcul } \sum \frac{(\alpha x)^n}{n!}$$

$$\sum \frac{(\alpha x)^n}{n!} = \sum \frac{t_n}{n!} = e^t = e^{\alpha x}$$

donc :

$$\sum (1 + \alpha^n) \frac{x^n}{n!} = e^x + e^{\alpha x}$$

$\oplus$ Calcul R :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \alpha^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1 + \alpha^n}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1 + \alpha^{n+1}}{1 + \alpha^n}$$

$$\bullet 1 < \alpha < -1 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0$$

$$R = +\infty$$

$$\bullet |\alpha| > 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{\alpha^{n+1}} + 1}{\frac{1}{\alpha^{n+1}} + \frac{1}{\alpha}} \rightarrow 0$$

$$R = +\infty$$

$$\bullet \alpha < -1 ; -\alpha > 0$$

$$\left| \frac{1}{\alpha^{n+1}} \right| = \frac{1}{|\alpha|^{n+1}} = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \rightarrow 0$$

$$R = +\infty$$



Exercice 4

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Si $|x| < 1$ on a: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

*) $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad x \in]-1, 1[$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) = 1$$

*) S est dérivable sur $]-1, 1[$

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \end{aligned}$$

on pose: $n-1 = k$

$$n=1 \Leftrightarrow k=0$$

$$n=+\infty \Leftrightarrow k=+\infty$$

$$S'(x) = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

donc: $S(x) = - \int \frac{dx}{1-x}$

$$= -\ln|1-x| + C$$

or: $x \in]-1, 1[$

$$-1 < x < 1$$

$$-1 < -x < 1$$

$$0 < 1-x < 2$$

Finalement: $S(x) = -\ln(1-x) + C$

Calculons C $S(0) = 0 = C$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$$\forall x \in]-1, 1[$$

Remarque $R(S') = R(S)$

par exemple

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^n}{n} = S(1/2) = \ln 2$$

Exercice 5

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^n}{n!} \quad 0! = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On pose: $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^n}{n!}$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

*) Rayon de Convergence de S:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{n!} \times \frac{(n+1)!}{(n+2)!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)} = +\infty$$

*) $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) \cdot n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!}$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$n-1 = k$$

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2) \frac{x^k}{k!}$$

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\Rightarrow S'(x) = S(x) + e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

S est une solution de :

$$y' - y = e^x$$

$$*) y' - y = 0$$

$$y' = y$$

$$y = Ce^x$$

$$*) C'e^x + Ce^x - Ce^x = e^x$$

$$C' = 1$$

$$C = x$$

$$y = Ce^x + xe^x$$

$$S(x) = (C+x)e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$S(0) = C = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^n}{n!} = xe^x + e^x$$

Autre méthode

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^n}{n!} \quad R = +\infty$$

Soit $W(x)$ une primitive de $S(x)$.

$$\text{C.à.d. : } W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \cdot x}{n!}$$

$$W(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x$$

$$\text{on a : } W'(x) = S(x)$$

$$(xe^x)' = S(x)$$

$$S(x) = e^x + xe^x$$

Remarque

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + e^x \end{aligned}$$

$$= x \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} + e^x$$

$$= xe^x + e^x$$

Remarque (ex 4)

Sachant que :

$$|x| < 1 \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\text{Calcul } \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

$T(x)$

Soit w la primitive de T ($w(0) = 0$)

$$W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = S(x)$$

$$W'(x) = S'(x) = \left(-\ln(1-x) \right)' = T(x)$$

$$= \frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{+\infty} x^m$$

Exercice 6

* $f(x) = (e^x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



$$f(x) = 2 + \frac{2}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \dots + \frac{2}{n!}x^n + \dots$$

$$f'(x) = 2x + \frac{2}{1!}x^2 + \frac{2}{2!}x^3 + \dots +$$

$$\frac{2}{n!}x^n + \dots$$

$$[(e^x)^2]' = f \cdot f' = 2e^x (e^x)'$$

$$= 2e^x \cdot e^x$$

$$f' = 2e^{2x} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

$$f = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Autre méthode :

$$f(x) = (e^x)^2 = e^x \cdot e^x = e^{2x}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

$DL_0^5(f)$

$$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 +$$

$$\frac{2^4}{4!}x^4 + \frac{2^5}{5!}x^5 + o(x^5)$$

$$(e^x)^2 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 +$$

$$\frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$$

$$Df =]-\infty, 3/2[$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$$

h admet un développement en série entière en 0 sur $] -1, 1[$

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$n! a_n = (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2} - 1) \dots (-\frac{1}{2} - n + 1)$$

$$n! a_n = (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \dots (-\frac{2n-1}{2})$$

$$n! a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1 \times 3 \times 5 \dots (2n-1))$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}} = \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{1-\frac{2}{3}x}}$$

$$t = \frac{2}{3}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{1-t}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{2}{3}x\right)^n$$

Exercice 7

$$a) - S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$S(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m!}$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!} \right) - 1$$

$$S(x) = e^x - 1$$

Finalement:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Rq :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = e^x - 1 - x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$b) - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$$

$$\text{Rappel: } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{si } |x| < 1$$

donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

(*) Calcul :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^n$$

$$n x^{n-1} = (x^n)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot x^{n-1} \cdot x)$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{on a: } \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{Si } |x| < 1$$

donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{2x + (1-x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1+x}{(1-x)^2}$$



$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)x^n = \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

$$\text{Si } |x| < 1$$

$$c) - \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n)x^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{si } |x| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

$$(x^n)'' = n(n-1)x^{n-2}$$

$$S(x) = x^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)''$$

$$= x^2 \left(\frac{1}{1-x} \right)''$$

$$= x^2 \cdot \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right)'$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} \quad \text{Si } |x| < 1$$

Série 3

Exercice 1

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ x^n \cdot \ln x & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow \left(\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| \leq \varepsilon \right)$$

ou

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - 0| \leq \varepsilon, \forall x \in [0,1]$$

Autre méthode :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - 0| \right) = 0$$

* f_n est dérivable sur $]0,1]$

$$f'_n(x) = nx^{n-1} \cdot \ln x + x^{n-1}$$

$$= x^{n-1} (n \ln x + 1)$$

$$= nx^{n-1} \left(\ln x + \frac{1}{n} \right)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \ln e = \ln e^{1/n}$$

$$\ln x + \frac{1}{n} = \ln x + \ln e^{1/n}$$

$$= \ln(x e^{1/n})$$

$$f'_n(x) = nx^{n-1} \ln(e^{1/n} \cdot x)$$

$$* \begin{cases} f'_n(x) = 0 \\ x \in]0,1] \end{cases} \Leftrightarrow \ln(e^{1/n} \cdot x) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{1/n} \cdot x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1/n} \in]0,1[$$

Tableau périodique de f :

x	0	$e^{-1/n}$	1
f'_n		-	+
f_n	0	$f_n(e^{-1/n})$	0

$$f_n(e^{-1/n}) = (e^{-1/n})^n \cdot \ln(e^{-1/n})$$

$$= e^{-1} \cdot \ln(e^{-1/n})$$

$$f_n(e^{-1/n}) = -\frac{e^{-1}}{n}$$

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| = |f_n(e^{-1/n})| = \frac{e^{-1}}{n}$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-1}}{n} \right) = 0$$

$(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Remarque $f_n = x^n, x \in [0,1]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{on pose : } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$



$$f_n \xrightarrow{CU} f$$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n]{X} 0$$

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |g_n(x)| = 1 \xrightarrow[n]{X} 0$$

Exercice 2

$$f_n = \frac{x}{n(1+x^n)}$$

$$f_n \xrightarrow{CU} 0 \text{ sur } [0, +\infty[$$

Remarque

$$\frac{1}{n(1+x^n)} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sup_{n \geq 0} |f_n| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{X} 0$$

Si $x \geq 1 \Rightarrow x^n \geq x$

$$1+x^n \geq x^n \geq x \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{n(1+x^n)} \leq \frac{1}{n}$$

Si $0 \leq x \leq 1$,
on a $x^n \geq 0$

$$1+x^n \geq 1 \geq x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{n(1+x^n)} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 0 \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sup_{n \geq 0} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 0} |f_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{c.à.d. : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 0} |f_n(x)| = 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n]{X} 0 \text{ sur } [0, +\infty[.$$

• Calcul de f'_n :

$$f'_n = \left(\frac{x}{n(1+x^n)} \right)'$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1+x^n - nx^n}{(1+x^n)^2}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1+(1-n)x^n}{(*)^2}$$

$$= \frac{1-n}{n} \cdot \left(\frac{1}{1-n} + x^n \right) / (*)^2$$

$$P(x) = x^n - \left(\frac{1}{n-1} \right)$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$$

$$\text{Si } n \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$$

$$\Rightarrow x^n \geq \frac{1}{n-1}$$

$$\Rightarrow x^n - \frac{1}{n-1} \geq 0$$



$$0 \leq n \leq n \sqrt{\frac{1}{n-1}}$$

$$n^n - \frac{1}{n-1} \leq 0$$

n	0	$\left(\frac{1}{n-1}\right)^{1/n}$	$+\infty$
f'_n		+	-
f_n	0	$\text{Sup } f_n$	0

$$f_n\left(n \sqrt{\frac{1}{n-1}}\right) = \frac{n \sqrt{\frac{1}{n-1}}}{n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}$$

$$= \frac{n \sqrt{\frac{1}{n-1}}}{n \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)}$$

$$= (n-1) \sqrt{\frac{1}{n-1}}$$

$$= \frac{n-1}{(n-1)^{1/n}} = \frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{n}-1}}$$



Exercice 3

$$f_n(x) = \frac{n x e^{-nx}}{1 - e^{-x}}$$

1. $Mq(f_n)$ converge simplement vers 0 sur $[0, +\infty[$

Soit $x \geq 0$

$$Mq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

Si $x = 0$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$e^x (1 - e^{-x}) \sim x$$

$$e^x \sim 1$$

$$1 - e^{-x} \sim x$$

$$\frac{n}{1 - e^{-x}} \sim \frac{1}{x}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n x e^{-nx}}{1 - e^{-x}} \quad x > 0$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-x}} \lim_{n \rightarrow +\infty} n x e^{-nx}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = 0$$

composé :

$$X = nx \quad \text{ou } x > 0$$

$$n \rightarrow +\infty \iff x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n x e^{-nx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

Finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n x e^{-nx}}{1 - e^{-x}} = 0 \quad \forall x > 0$$

2- Mq (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $]0, +\infty[$

on $f_n \xrightarrow{c.u.} 0$ sur $]0, +\infty[$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x > 0} |f_n(x) - 0| = 0$

ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup (f_n(x)) = 0$.

2) f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$f'_n = n \cdot \frac{(ne^{-nx})(1-e^{-x}) - e^{-x}(ne^{-nx})}{(1-e^{-x})^2}$$

$$\frac{(1-e^{-x})^2}{n} f'_n = F_n(x)$$

$$= (e^{-nx} - nne^{-nx})(1-e^{-x}) - ne^{-(n+1)x}$$

$$= e^{-nx} - e^{-(n+1)x} - nne^{-nx} + nne^{-(n+1)x}$$

$$- ne^{-(n+1)x}$$

$$F_n(x) = e^{-nx} [1 - e^{-x} - nx + nne^{-x} - ne^{-x}]$$

$$= e^{-nx} \cdot e^{-x} [e^x - 1 - nx + nn - n]$$

$$= e^{-nx} \cdot e^{-x} \underbrace{[e^x(1-nn) + n(n-1) - 1]}_{\Psi(n)}$$

⊗ Signe de $\Psi(x)$

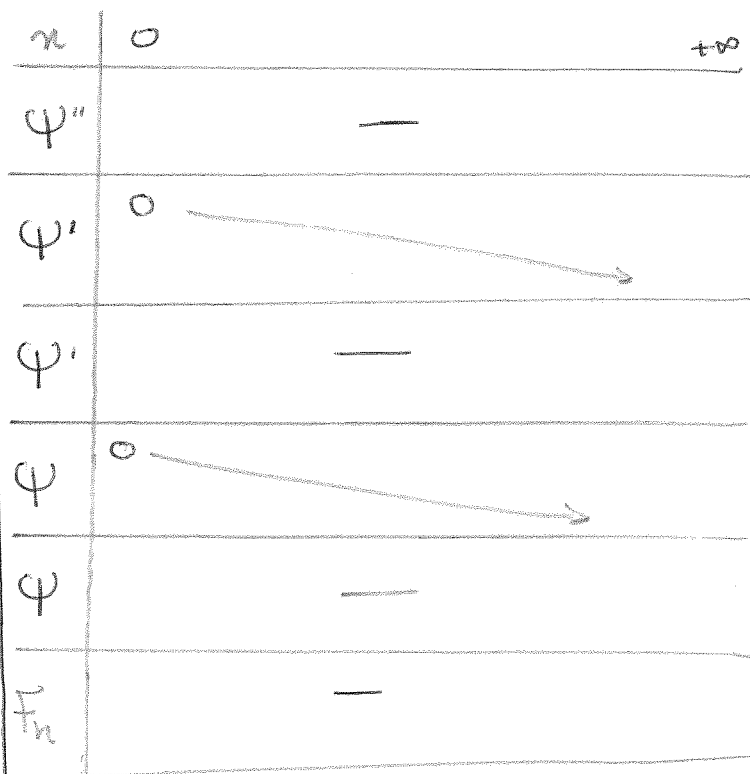
$$\Psi'(x) = e^x(1-nn) - ne^x + (n-1)$$

$$= e^x(1-n-nx) + (n-1)$$

$$\Psi''(x) = e^x(1-n-nx)(-e^x \cdot n)$$

$$= e^x(1-n-nx-n)$$

$$= e^x(1-2n-nx) < 0$$



Donc f_n est décroissante sur $]0, +\infty[$

$$\sup_{n > 0} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow 0} f_n(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{nne^{-nx}}{1-e^{-x}} = n$$

$$e^n - 1 \sim n$$

$$e^{-n}(e^n - 1) \sim ne^{-n} \sim n$$

$$1 - e^{-n} \sim n$$

$$\text{D'où } \sup_{n > 0} f_n(x) = n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup_{n > 0} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \neq 0$$

Càd : $f_n \not\xrightarrow{c.u.} 0$ sur $]0, +\infty[$



Exercice 4

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

• Mq (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0, +\infty[$

④ $f_n(0) = 0 \quad \forall n.$

④ Si $x > 0$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!} = 0.$



$$e^{-x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right) = 0$$

ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

on sait que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ cv

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} \leq \frac{2 \times 2}{1 \times 2} \times \frac{1}{n}$$

$$\frac{x^n}{n!} \leq \frac{(E(x)+1)^n}{n!}$$

on pose $E(x)+1 = n_0$

$$\frac{n_0^n}{n!} = \frac{n_0 \times n_0 \times n_0 \dots \times n_0}{1 \times 2 \times \dots \times n} \leq \frac{n_0 \times n_0 \times n_0}{1 \times 2 \times \dots \times n}$$

$$\frac{n_0}{n} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{C.S.} 0 \text{ sur } [0, +\infty[$$

Rq: $\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

pour $n \geq E(x)+1$

donc pour passer n assez grand

$$0 < \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow f_{n+1}(x) < \frac{1}{2} f_n(x)$$

$$f_{n+1}(x) < \frac{1}{2} f_n(x)$$

$$f_{n+1}(x) < \frac{1}{2} f_n(x)$$

$$0 < f_n(x) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} f_{n_0}(x)$$

2- Mq $\sum f_n$ C.S. vers 1 sur $[0, +\infty[$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = 1 ?$$

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$$

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x) = \sum_{n=0}^N \left(\frac{x^n}{n!} e^{-x} \right) = e^{-x} \left(\sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \right)$$

$$\lim_N S_N(x) = e^{-x} \lim \left(\sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \right)$$

$$= e^{-x} \cdot e^x = 1$$

3- Mq $\sum f_n$ ne converge pas sur $[a, +\infty[$.

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \geq a$$

$$\sum a_n \text{ cv}$$

Série converge normale sur I

$\Rightarrow$ Série de fonctions C.U. vers I

⊗ Il suffit de Mq
 $\sum f_m \xrightarrow{cy} 1$ sur $[a, +\infty[$

$$\sup_{n \geq a} \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{m \rightarrow +\infty} 0$$

$$\sup_{n \geq a} |S_m(x) - S_n(x)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{m \rightarrow +\infty} 0$$

$$\sum_{k=n+1}^m f_k(x) = \sum_{k=n+1}^m \frac{x^k \cdot e^{-x}}{k!}$$

$$\begin{aligned} m &= n+p \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{x^k \cdot e^{-x}}{k!} \right) \\ &= e^{-x} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{a^k}{k!} \end{aligned}$$



Série 2

Exercice 3

$$f_n = \frac{n x e^{-n x}}{1 - e^{-x}}$$

$$x \in [0, +\infty[$$

$$1) - (f_n) \xrightarrow{s} 0 \text{ sur } [0, +\infty[$$

$$2) - (f_n) \not\xrightarrow{u} 0 \text{ sur } [0, +\infty[$$

$$1 - f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Pour } x > 0 \quad n x e^{-n x} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{Rappel: } \lim_{\square \rightarrow +\infty} \square^m e^{-\square} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\forall x > 0$$

$$\Rightarrow (f_n) \xrightarrow{s} 0 \text{ sur } [0, +\infty[$$

$$2) - (f_n) \not\xrightarrow{u} 0 \text{ sur } [0, +\infty[$$

$$S_n(x) = |f_n(x)| = \frac{n x e^{-n x}}{1 - e^{-x}}$$

$$\text{si } \exists x_n \in [0, +\infty[$$

$$S_n(x_n) \not\rightarrow 0$$

$$\Rightarrow (f_n) \not\xrightarrow{u} 0 \text{ sur } [0, +\infty[$$

$$0 < \delta_n(x_n) \leq \sup_I \delta(x_n)$$

$$\delta_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n \left(\frac{1}{n}\right) e^{-n \cdot \frac{1}{n}}}{1 - e^{-1/n}}$$

$$= \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1/n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

$\Rightarrow$ Donc f_n ne converge pas Uniformement vers 0

Exercice 1

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

$$\forall n \geq 0 \quad x \in [0, +\infty[$$

$$1 - (f_n) \xrightarrow{s} 0 \quad n \in [0, +\infty[$$

$$f_n(0) = 0 \quad \forall n \geq 0$$

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} f_n(x) &= \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \cdot e^{-x} \\ &= e^{-x} \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 \end{aligned}$$

$$x > 0 \quad f_n(x) \longrightarrow 0$$

CNC

$$2 - \sum f_n(x) \quad \forall x \geq 0$$

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n \geq 0} f_n(x) &= \sum_{n \geq 0} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \\ &= e^{-x} \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \\ &= e^{-x} \cdot e^x = 1 \end{aligned}$$

$$4 - \sum f_n \text{ CV normalement sur } [0, a] \quad \forall a \geq 0$$

Rappel:

$$\exists a_n, a_n \geq 0$$

$$\text{Si } \begin{cases} |f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \\ \sum a_n \text{ CV} \end{cases}$$



Alors $\sum f_n$ CV normal

si $[0, a]$

$$|f_n(x)| = \frac{x^n \cdot e^{-x}}{n!} \leq \underbrace{\frac{f_n(a)}{a_n}}_{a_n}$$

$$\sup |f_n(x)| = f_n(a)$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n = \sum_{n \geq 0} f_n(a)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{a^n e^{-a}}{n!} = 1$$

$$\sum a_n \text{ CV} \Rightarrow \sum f_n \text{ CV normal}$$

$$5 - \text{CV normal} \Rightarrow \text{CV u sur } [0, +\infty[$$

$$\text{sur } [0, a]$$

$$6 - \sum f_n \text{ ne CV pas unif sur } [0, +\infty[$$

$$\text{par l'absurde } \sum f_n \text{ CV unif sur } [0, +\infty[$$

$$\forall x \text{ dans un voisinage de } +\infty \quad [0, +\infty[$$

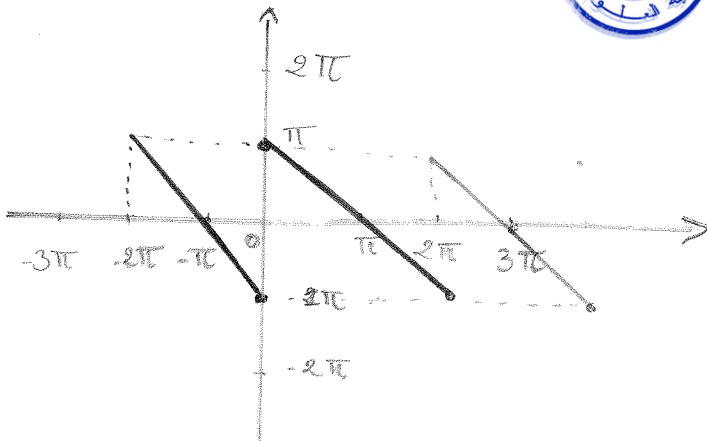
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 0} f_n(x) = \sum_{n \geq 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

$$1 = 0$$

par absurd

Ex6

⊗ $f_1(x) = \pi - x$
sur $[0, 2\pi]$



$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad n \geq 1$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ici : $T = 2\pi \quad \omega = 1$

* f_1 impaire $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 0$

$$n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) \sin(nt) dt$$

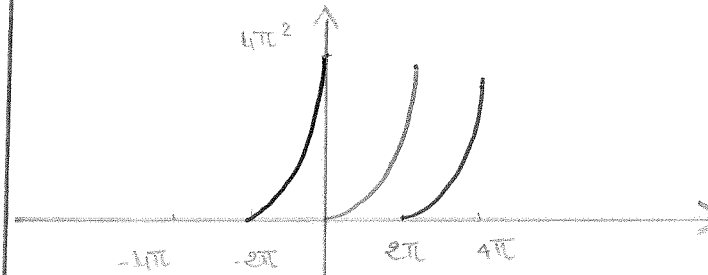
$$\begin{cases} u = \pi - t & u' = -1 \\ v' = \sin(nt) & v = -\frac{1}{n} \cos(nt) \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(\pi - t) \cos nt}{-n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{n} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(\pi - 0) \cos n \times 0}{-n} - \frac{(\pi - 2\pi) \cos 2n\pi}{-n} \right] - \frac{1}{n\pi} \left[\frac{\sin nt}{n} \right]_0^{2\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{n} \quad \forall n \geq 1$$

⊗ $f_2(x) = x^2 \quad [0, 2\pi]$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$C_n(f_2) = \frac{1}{T} \int_0^T f_2(t) e^{i(n\omega t)} dt$$

$$C_n(f_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^2 e^{int} dt \quad I$$

(e ne s'intéresse pas au pair et impaire)

$$\begin{cases} U = t^2 & U' = 2t \\ V' = e^{int} & V = \frac{1}{in} e^{int} \end{cases}$$

$$I = \left[\frac{t^2 e^{int}}{in} \right]_0^{2\pi} - \frac{2}{in} \int_0^{2\pi} t e^{int} dt$$

$$= \frac{1}{in} 4\pi^2 - \frac{2}{in} J$$

$$I = \frac{1}{in} 4\pi^2 - \frac{2}{in} J$$

Calcul J :

$$\begin{cases} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{int} & v = \frac{1}{in} e^{int} \end{cases}$$

$$J = \frac{1}{in} \left[t e^{int} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} e^{int} dt$$

$$J = \frac{1}{in} 2\pi$$

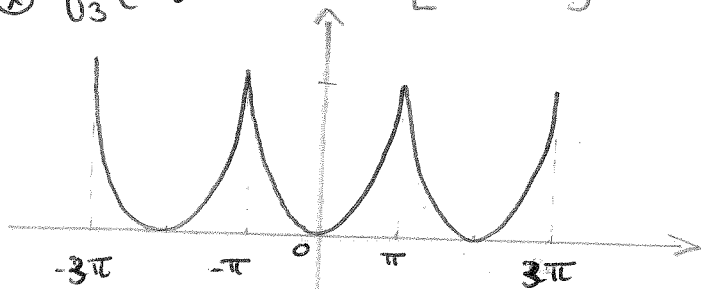
$$I = \frac{1}{in} 4\pi^2 - \frac{2}{in} \left(\frac{1}{in} 2\pi \right)$$

$$= \frac{1}{in} 4\pi^2 + \frac{4\pi}{n^2}$$

$$C_n(f_2) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{in} 4\pi^2 + \frac{4\pi}{n^2} \right)$$

$$= \frac{2\pi}{in} + \frac{2}{n^2}$$

$$\textcircled{*} f_3(x) = x^2 \quad [-\pi, \pi]$$



$$[a, b] \quad T = |a| + |b|$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$\textcircled{*} f_3 \text{ paire}$$

$$b_n(f_3) = 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_3(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_3(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

Remarque

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos n\omega t$$

$$n \geq 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt dt$$

$$\begin{cases} u = t^2 & u' = 2t \\ v' = \cos nt & v = +\frac{1}{n} \sin nt \end{cases}$$

$$a_n = \frac{4}{n^2} \cos(n\pi)$$

$$= \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

$$\textcircled{*} f_4(x) = \sin x \quad [0, 2\pi]$$

$$\sin x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nt +$$

$$b_1 \sin t + \sum_{n \geq 2} b_n \sin nt$$

$$\forall n \geq 0 \quad a_n = 0 \quad b_1 = 1$$

$$\forall n \geq 2 \quad b_n = 0$$

$$n=1 \Rightarrow C_n = 0$$

$$C_1 = \frac{1}{2} (a_1 - ib_1) = -\frac{i}{2}$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) = \frac{i}{2}$$



Exercice 1

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$$

$$n \geq 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ CV}$$

donc, il y a CV normale,

donc, CV uniforme

donc, CV simple

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

$$[0, +\infty[$$

• f_n CV simplement vers la fonction nulle.

$$f'_n(x) = \frac{1}{n!} x^{n-1} (n-x) e^{-x}$$

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{en}{e}\right)^n$$

$$f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

• f_n CV uniformément sur $[0, +\infty[$.

• $\sum f_n$ CV simplement vers 1

• il n'y a pas CV normale sur $[a, +\infty[$ car $f_n(n)$ n'est pas sommable.

• il y a CV normale sur $[0, a]$

$$n \geq a \quad \sup_{x \in [0, a]} |f_n(x)| = f_n(a)$$

• il y a CV uniforme sur $[0, a]$

• par absurde, s'il y a CV uniforme sur une voisinage de $+\infty$ on obtient par la le Th de la double limite

$$\lim_{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n(x)$$

$$1 = 0$$

il n'y a pas CV uniforme sur $[0, +\infty[$

Série de Fourier



Exercise 4

④ - $\Pi q \sum f_n$ CV normal
sur $[0, a]$

	a	n	$+\infty$
f'_n		$+$ ϕ $-$	
		$f_n(n)$	

	0	a
f'_n		$+$
f_n	0	$f_n(a)$

Done : $\forall x \in [0, a]$

$$f_n(x) \leq f_n(a)$$

$$\circ) f_n(a) > 0 \quad \forall n \geq 0$$

$$\circ) 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a)$$

est CV $\rightarrow 1$

$$\sum f_n \xrightarrow{\text{C.S.}} 1 \text{ sur } [0, +\infty[$$

$$\forall x \in [0, +\infty[$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N f_n(x) = 1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} F_N(x) = 1$$

$$N \rightarrow +\infty$$

$$F_N \xrightarrow{\text{C.S.}} 1$$



c/c $\sum_n f_n$ CV normale
sur $[0, a]$

$$\textcircled{5} - \text{CN} \Rightarrow \text{C.U} \Rightarrow \text{C.S}$$



$$\text{non}(\text{C.U}) \Rightarrow \text{non}(\text{CN})$$

⑥ -

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$$

$$m \geq n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^m f_k(x) \right| \leq \epsilon$$

$$\forall x \in [a, +\infty[$$

ou $\otimes$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$$

$$m \geq n \geq N \Rightarrow \text{Sup} \left(\sum_{k=n}^m \frac{x^k e^{-x}}{k!} \right) \leq \epsilon$$

$$0 \leq f_k(x) \leq f_k(k) = \frac{k^k \cdot e^{-k}}{k!}$$

$$\forall x \geq a.$$

$$0 \leq$$

$$\text{Done : } 0 < f_k(a) \leq f_k(x) \quad \forall x \geq a$$

$$\sum_{k=n}^m f_k(a) \leq \sum_{k=n}^m f_k(x) \quad \forall x \geq a$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^m f_k(a) \leq \epsilon$$



$$(1+u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} u^n$$

$$(1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{-1/2(-1/2-1)}{2!}u^2 +$$

$$\frac{-1/2(-1/2-1)(-1/2-2)}{3!}u^3 +$$

$$\frac{-1/2(-1/2-1)(-1/2-2)(-1/2-3)}{4!}u^4 +$$

$$\frac{-1/2(-1/2-1)(-1/2-2)(-1/2-3)(-1/2-4)}{5!}u^5$$

$$+ u^5 \varepsilon(u)$$

Exercise 7

$$\textcircled{*} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$$

on pose $K=n+1$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$$

$$= n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} \dots \frac{n^n}{n!}$$

$$= \left(1 + n + \dots \frac{n^n}{n!}\right) - 1$$

$$= e^n - 1$$

$$e^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$$

$$= 1 + n + \frac{n^2}{2!} \dots \frac{n^n}{n!} \dots$$

$$e^n - 1 = n + \frac{n^2}{2!} \dots \frac{n^n}{n!} \dots$$

$$e^n - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$$

$$e^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n)^k}{k!}$$

$$= 1 + \frac{2n}{1!} + \frac{(2n)^2}{2!} + \frac{(2n)^3}{3!} + \frac{(2n)^4}{4!} + \frac{(2n)^5}{5!} + n^5 \varepsilon(n)$$

avec: $\varepsilon(n) \rightarrow 0$
 $n \rightarrow 0$

$$e^{2n} = 1 + 2n + 2n^2 + \frac{8}{6}n^3 + \frac{2^4}{4!}n^4 + \frac{2^5}{5!}n^5 + o(n^5)$$

$$(*) f(n) = \frac{1}{\sqrt{3-2n}}$$

$$\sqrt{3-2n} = \sqrt{3(1-\frac{2}{3}n)}$$

$$= \sqrt{3} \sqrt{1-\frac{2}{3}n}$$

$$= \sqrt{3} (1-\frac{2}{3}n)^{1/2}$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{3} (1-\frac{2}{3}n)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (1-\frac{2}{3}n)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (1+u)^{-1/2} \quad u = -\frac{2}{3}n$$

il faut que $|u| < 1$.

$$|u| = |-\frac{2}{3}n| = \frac{2}{3}|n|$$

$$\frac{2}{3}|n| < 1 \quad |n| < \frac{3}{2}$$

$$(1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)u^2}{2!} + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)u^3}{3!} + \dots$$

Exemple

$$\odot \frac{1}{1-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n^n \quad |n| < 1$$

$$\odot \frac{1}{1+n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n^n \quad |n| < 1$$

$$\odot \log(1+n) = \int_0^n \frac{1}{1+t} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} n^{n+1}$$

$$\odot \frac{1}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n^{2n} \quad |n| < 1$$

$$\odot \int_0^n \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctg}]_0^n$$

$$= \text{Arctg}(n) - \text{Arctg}(0)$$

$$= \text{Arctg}(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} n^{2n+1}$$

$$\odot (1+n)^\alpha = 1 + \alpha n + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} n^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} n^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} n^n$$

Ceci $\forall |n| < 1$

$$(1+n)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} n^n$$

$$(*) f(n) = (e^x)^{2n} = e^{2n}$$

On général: $e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$

$$e^{2n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2n)^k}{k!}$$

Exercice 6

$$f:]-\alpha, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

f est développable en série entière au voisinage de 0,

S'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$$\forall |x| < \alpha$$

Rq. Si f est développable en série entière alors f est C^∞ sur $]-\alpha, \alpha[$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Proposition: $f:]-\alpha, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)$$

Si f est de C^∞ sur $]-\alpha, \alpha[$
 f est développable en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$ si et seulement si:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Converge vers 0 $\forall |x| < \alpha$.

Théorème: Si $f:]-\alpha, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)$$

de C^∞ sur $]-\alpha, \alpha[$

$$\exists M > 0, \forall n, \forall x \in]-\alpha, \alpha[$$

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

Alors f est développable en série entière et on a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \left[-\log(1-t) \right]_0^x$$

$$= -\log(1-x)$$

$$= \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

D'où: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \forall |x| < 1$$

Exercice 5

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\text{or: } (n+1) \frac{x^n}{n!} = n \frac{x^n}{n!} + \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{x^n}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}$$

$$= x \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} x \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^x$$

$$= x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} + e^x$$

$$= x e^x + e^x = e^x (1+x)$$



$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

$$f:]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x)$$

④ Les séries $(\sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1})$ est
 $(\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} x^{n+1})$ obtenues de la
 série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ par dérivation
 et intégration terme à terme,
 ont même rayon de CV R .

et $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| < R$, on a :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} f'(x) &= \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right)' \\ &= \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sum_{n \geq 0} a_n t^n dt$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

• La série est absolument Convergente
 pour $|x| < 1$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt$$

D'après le théorème d'intégration
 de Série entières

$$\begin{aligned} \int_0^x t^n dt &= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^x \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Exercice 3

$$U_n = (1 + 2x) \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum U_n \rightarrow R_1 \quad \forall |x| < R_1$$

$$\sum U_n \rightarrow R_2 \quad \forall |x| < R_2$$

$$|x| < \inf(R_1, R_2)$$

$$\underbrace{\sum (U_n + U_n)}_{CV} = \sum U_n + \sum U_n$$

$$U_n = (1 + 2x) \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{x^n}{n!} + \frac{2x^n x}{n!}$$

$$= \frac{x^n}{n!} + \frac{(2x)^n}{n!}$$

deux termes généraux de
 Série entière de $R = +\infty$

$$\sum U_n = \sum \left(\frac{x^n}{n!} + \frac{(2x)^n}{n!} \right)$$

$$= \sum \frac{x^n}{n!} + \sum \frac{(2x)^n}{n!}$$

$$= e^x + e^{2x}$$

Exercice 4

$$U_n = \frac{x^n}{n}$$

⊕ Continuité :

f est Continue sur $] -R, R[$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \sum_{n \geq 0} a_n x_0^n$$

⊕ dérivation et intégration :

Soit $\sum a_n x^n$ une Série
 entière . R son rayon de CV . $R \neq 0$
 et f sa Somme

$$\sqrt{x} = -2$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-2)^n}{n 2^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

Série Alternée, il converge.

$$(*) \sum \frac{n}{2^n(n+1)} x^n.$$

$$a_n = \frac{n}{2^n(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}(n+2)} \cdot \frac{2^n(n+1)}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$R = 2$$

L'intervalle de CV :
 $] -2, 2[$

① $x \in] -2, 2[$: absolm CV

② $x \in] -\infty, -2[\cup] 2, +\infty[$: div

$$(*) |x| = 2$$

$$\sqrt{x} = 2 \sum \frac{n}{2^n(n+1)} 2^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1}$$

div, car le terme générale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

$$\sqrt{x} = -2 \sum \frac{n}{2^n(n+1)} (-2)^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} (-1)^n$$

le terme ne tend pas vers 0, div.

Exercice 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$$

$$(*) U_n = \frac{n}{n^2+1} x^n \quad a_n = \frac{n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n}$$

$$= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n^2+1}{(n^2+1)^2+1} \rightarrow 1$$

$$R = 1$$

L'intervalle de CV : $] -1, 1[$

$$(*) |x| = 1$$

$$\sqrt{x} = 1 \sum \frac{n}{n^2+1}$$

$$\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n} \text{ div}$$

$$\sqrt{x} = -1 \sum \frac{n}{n^2+1} (-1)^n$$

Série alternée convergente.

$$\text{Car } \left(\frac{n}{n^2+1} \right) \rightarrow 0.$$

$$(*) \frac{x^n}{n 2^n} = U_n \quad a_n = \frac{1}{n 2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 2^n}{(n+1) 2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

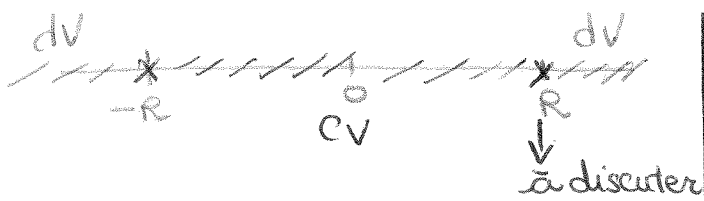
$$R = 2.$$

L'intervalle de CV : $] -2, 2[$

$$(*) |x| = 2$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n 2^n} = \sum \frac{1}{n} \text{ div.}$$



$$(*) \quad u_n = \frac{x^n}{n!} \quad a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$R = +\infty$$

L'intervalle de convergence :

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Absolument CV.

$$(*) \quad u_n = \frac{n!}{n^n} x^n \quad a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\text{Car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e$$

d'où : $R = e$.

L'intervalle de CV : $]-e, e[$



Série 2

Exercice 1

$$(*) \quad u_n = x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \quad R = \frac{1}{l}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$R = 1$$

L'intervalle de CV

$$]-1, 1[$$

$$(*) \quad \forall |x| < 1 \quad x \in]-1, 1[$$

la série entièrement est absolument CV

$$(*) \quad \text{si } |x| > 1 \quad \text{la série DV}$$

$$(*) \quad \text{si } |x| = 1 \quad \text{à discuter.}$$

$$(*) \quad u_n = \frac{x^n}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$R = 1$$

L'intervalle de CV :

$$]-1, 1[$$

$$(*) \quad \text{si } |x| :$$

$$\checkmark \quad x = 1 \quad \sum \frac{x^n}{n} = \sum \frac{1}{n} \quad \text{DV}$$

$$\checkmark \quad x = -1 \quad \sum \frac{x^n}{n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

Série Alternée

il est CV. ms n'est pas absolument CV.